В.М. Миклюков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В двух томах.

Волгоград 2011

ББК 22.161.558
М59

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук А.А. Клячин
канд. физ.-мат. наук А.Н. Кондрашов

Миклюков В.М.
Геометрический анализ: В 2-х т.
[Текст]: [монография]/
ISBN 5-9669-0209-7

Монография посвящена введению в геометрический анализ. Цель книги — дать как можно более широкое представление о методах современного геометрического анализа, познакомить научную молодежь, начинающую работать в многомерном анализе, с некоторыми интересными и еще слабо изученными задачами из необъятного запаса, которыми располагают теория квазиконформных отображений и нелинейные уравнения с частными производными.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и всех читателей, интересующихся указанными вопросами.

ББК 22.161.558

ISBN 5-9669-0209-7

Предисловие

Уже первооткрывателями теории квазиконформных отображений – М.А. Лаврентьевым и Г. Гречем – превосходно понимались наитеснейшие связи теории с нелинейными эллиптическими уравнениями в частных производных. Вообще говоря, и сама теория квазиконформных отображений возникла как ответ на вызовы механики жидкости и газа, формулирующей все новые и новые задачи, аппелирующие ко все более экзотичным нелинейным уравнениям и системам (М.А. Лаврентьев [75], М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат [76, глава III], Л. Берс [16, глава II], И.Н. Векуа [25, глава шестая], В.Н. Монахов [130, глава V], Ю.В. Шеретов [161, глава 4] и др.).

В двумерном случае взаимосвязи между квазиконформными отображениями и уравнениями к настоящему времени, в целом, понятны. Вместе с тем, в случае $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, вплоть до сегодняшнего времени имеется определенная лакуна в информации относительно квазиконформных отображений $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и решений квазилинейных уравнений, описывающих компоненты f_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вектор-функции f. К примеру, почти ничего не известно о системах дифференциальных уравнений для нескольких компонент $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$, $1 < k < n$, вектор-функции, осуществляющей квазиконформное отображение. Необходимость в информации, заполняющей данную лакуну, давно ощущается в сообществе специалистов, изучающих квазиконформные отображения. Частичное решение этой проблемы дано в монографиях А.П. Копылова [68, глава 3], Т. Иванца и Г. Мартина [237, глава 16], Ю. Хейнонена [221, глава 5].

Предлагаемая монография посвящена новейшим результатам теории пространственных квазиконформных отображений, группирующимся вокруг описанной проблемы. Исследуются свойства дифференциальных форм классов $\mathcal{WT}$, включающих в себя наряду с решениями (субрешениями, суперрешениями) квазилинейных уравнений эллиптического типа отображения с ограниченным искажением. Указываются применения в проблеме описания квазиконформно плоских поверхностей в n-мерных римановых многообразиях, в том числе — для поверхностей произвольной коразмерности $1 \leq \mathrm{codim} \leq n - 1$.

Разрабатываемые методы оказываются эффективными в исследованиях широкого класса нелинейных уравнений с частными производными, выходящими далеко за пределы очерченного круга вопросов. Попутно, если это не требует привлечения дополнительно слишком большого объема информации, мы даем приложения некоторых из наших общих результатов к уравнениям типа минимальной поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, уравнению максимальных поверхностей в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$ и уравнению газовой динамики.

Исследуются почти-решения уравнений с частными производными и почти-квазиконформные отображения.

Почти-решения представляют собой специального вида аппроксимации решений, наследующие весьма обширный список свойств решений. Со времени, прошедшего после первого издания книги, здесь появилась целая серия работ, касающихся почти-решений. В частности, получены аналоги неравенства Гарнака о положительных гармонических функциях, теоремы Лиувилля и теоремы Адамара о трех кругах для голоморфных функций, оценки размеров зон стагнации и др. В настоящее издание включены и эти новейшие результаты.

Почти-квазиконформные отображения являются обобщениями классических квазиконформных отображений, допускающими смену ориентации. Даются приложения таких отображений к теории неявных функций, указываются связи с почти-решениями.

С более детальным описанием содержания книги можно ознакомиться по ее оглавлению.

Геометрический анализ, как некоторое синтетическое направление в анализе и геометрии, являет собой активно развивающийся, но еще окончательно не сформировавшийся раздел современной науки. Цель книги — на примере описанной выше проблематики дать введение в геометрический анализ, дать как можно более широкое представление о его методах, познакомить научную молодежь, начинающую работать в многомерном анализе, с некоторыми интересными и еще слабо изученными задачами из необъятного запаса, которыми располагают теория квазиконформных отображений и нелинейные уравнения с частными производными. Автор надеется, что эта высокая цель отчасти оправдывает многочисленные отступления от стержневой линии изложения. В книге приводится значительное количество задач и упражнений, на которых начинающие исследователи могут попробовать свои силы.

Автор будет весьма рад, если книга окажется полезной читателю.

Владимир Михайлович Миклюков
e-mail: miklyuk@mail.ru
г. Волгоград, январь 2011

Содержание