

В.М. Миклюков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В двух томах.

Волгоград 2011

ББК 22.161.558
М59

Данная работа является объектом авторского права и находится под охраной Закона РФ 'Об авторском праве и смежных правах'. Использование данной работы или любой ее части без ссылок на авторов запрещается.

Нарушители авторских прав авторов настоящей работы могут быть подвергнуты административному или уголовному преследованию в порядке ст. 7.12 КоАП РФ (Нарушение авторских и смежных прав) или ст. 146 УК РФ (Нарушение авторских и смежных прав).

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук А.А. Клячин
канд. физ.-мат. наук А.Н. Кондрашов

Миклюков В.М.

Геометрический анализ: В 2-х т.

[Текст]: [монография]/

ISBN 5-9669-0209-7

Монография посвящена введению в геометрический анализ. Цель книги — дать как можно более широкое представление о методах современного геометрического анализа, познакомить научную молодежь, начинающую работать в многомерном анализе, с некоторыми интересными и еще слабо изученными задачами из необъятного запаса, которыми располагают теория квазиконформных отображений и нелинейные уравнения с частными производными.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и всех читателей, интересующихся указанными вопросами.

ББК 22.161.558

ISBN 5-9669-0209-7

© UCHIMSYA, LLC 2011

Предисловие

Уже первооткрывателями теории квазиконформных отображений – М.А. Лаврентьевым и Г. Гречем – превосходно понимались наитеснейшие связи теории с нелинейными эллиптическими уравнениями в частных производных. Вообще говоря, и сама теория квазиконформных отображений возникла как ответ на вызовы механики жидкости и газа, формулирующей все новые и новые задачи, апеллирующие ко все более экзотичным нелинейным уравнениям и системам (М.А. Лаврентьев [75], М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат [76, глава III], Л. Берс [16, глава II], И.Н. Векуа [25, глава шестая], В.Н. Монахов [130, глава V], Ю.В. Шеретов [161, глава 4] и др.).

В двумерном случае взаимосвязи между квазиконформными отображениями и уравнениями к настоящему времени, в целом, понятны. Вместе с тем, в случае \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, вплоть до сегодняшнего времени имеется определенная лакуна в информации относительно квазиконформных отображений $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и решений квазилинейных уравнений, описывающих компоненты f_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) вектор-функции f . К примеру, почти ничего не известно о системах дифференциальных уравнений для нескольких компонент (f_1, f_2, \dots, f_k) , $1 < k < n$, вектор-функции, осуществляющей квазиконформное отображение. Необходимость в информации, заполняющей данную лакуну, давно ощущается в сообществе специалистов, изучающих квазиконформные отображения. Частичное решение этой проблемы дано в монографиях А.П. Копылова [68, глава 3], Т. Иванца и Г. Мартина [237, глава 16], Ю. Хейнонена [221, глава 5].

Предлагаемая монография посвящена новейшим результатам теории пространственных квазиконформных отображений, группирующимся вокруг описанной проблемы. Исследуются свойства дифференциальных форм классов \mathcal{WT} , включающих в себя наряду с решениями (субрешениями, суперрешениями) квазилинейных уравнений эллиптического типа отображения с ограниченным искажением. Указываются применения в проблеме описания квазиконформно плоских поверхностей в n -мерных римановых многообразиях, в том числе — для поверхностей произвольной коразмерности $1 \leq \text{codim} \leq n - 1$.

Разрабатываемые методы оказываются эффективными в исследованиях широкого класса нелинейных уравнений с частными производными, выходящими далеко за пределы очерченного круга вопросов. Попутно,

если это не требует привлечения дополнительно слишком большого объема информации, мы даем приложения некоторых из наших общих результатов к уравнениям типа минимальной поверхности в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , уравнению максимальных поверхностей в пространстве Минковского \mathbb{R}_1^{n+1} и уравнению газовой динамики.

Исследуются почти-решения уравнений с частными производными и почти-квазиконформные отображения.

Почти-решения представляют собой специального вида аппроксимации решений, наследующие весьма обширный список свойств решений. Со времени, прошедшего после первого издания книги, здесь появилась целая серия работ, касающихся почти-решений. В частности, получены аналоги неравенства Гарнака о положительных гармонических функциях, теоремы Лиувилля и теоремы Адамара о трех кругах для голоморфных функций, оценки размеров зон стагнации и др. В настоящее издание включены и эти новейшие результаты.

Почти-квазиконформные отображения являются обобщениями классических квазиконформных отображений, допускающими смену ориентации. Даются приложения таких отображений к теории неявных функций, указываются связи с почти-решениями.

С более детальным описанием содержания книги можно ознакомиться по ее оглавлению.

Геометрический анализ, как некоторое синтетическое направление в анализе и геометрии, являет собой активно развивающийся, но еще окончательно не сформировавшийся раздел современной науки. Цель книги — на примере описанной выше проблематики дать введение в геометрический анализ, дать как можно более широкое представление о его методах, познакомить научную молодежь, начинающую работать в многомерном анализе, с некоторыми интересными и еще слабо изученными задачами из необъятного запаса, которыми располагают теория квазиконформных отображений и нелинейные уравнения с частными производными. Автор надеется, что эта высокая цель отчасти оправдывает многочисленные отступления от стержневой линии изложения. В книге приводится значительное количество задач и упражнений, на которых начинающие исследователи могут попробовать свои силы.

Автор будет весьма рад, если книга окажется полезной читателю.

Владимир Михайлович Миклюков

e-mail: miklyuk@mail.ru

г. Волгоград, январь 2011

Содержание

1	Граничные множества	1
1.1	Граничные множества абстрактной поверхности	1
1.1.1	Римановы многообразия	1
1.1.2	Абстрактная поверхность	3
1.1.3	Модуль и емкость	6
1.1.4	Граничные множества	9
1.1.5	Емкость и мера Хаусдорфа	10
1.1.6	Понятие типа граничного множества	11
1.1.7	Квазиконформные отображения	16
1.1.8	Функция исчерпания граничного множества	19
1.1.9	Специальная функция исчерпания	20
1.2	Тип граничного множества	28
1.2.1	Признаки параболичности и гиперболичности	28
1.2.2	”Взвешенные” объемы	31
1.2.3	Изопериметрия и гиперболичность	34
1.2.4	”Угловые” и ”цилиндрические” области	39
1.3	Графики	44
1.3.1	Оценка модуля конденсатора на графике	44
1.3.2	Решения неравенства $f\mathcal{L}[f] \geq 0$	49
1.3.3	Минимальная поверхность над полосой	58
1.3.4	Графики в пространстве Минковского	60
2	Внешние дифференциальные формы	70
2.1	Базовые понятия	70
2.1.1	Формы на евклидовом пространстве	70
2.1.2	Поливекторы	74
2.1.3	Формы на римановых многообразиях	75
2.2	Классы дифференциальных форм	85
2.2.1	Определения \mathcal{WT} -классов	85
2.2.2	Связь с эллиптическими уравнениями	88

2.2.3	Связь с квазирегулярными отображениями	91
2.3	Оценки интеграла энергии	99
2.3.1	Граничные условия	99
2.3.2	Принцип максимума для WT -форм	103
2.3.3	Теорема Лиувилля	105
2.3.4	Рост интеграла энергии	107
2.3.5	Теоремы типа Фрагмена – Линделефа	113
2.3.6	Задача Данжуа – Карлемана – Альфорса	115
2.3.7	Устранимые особенности	120
3	Непрерывность по Гельдеру	126
3.1	Непрерывность по Гельдеру на компактах	126
3.1.1	Постановка задачи	126
3.1.2	Точная формулировка	128
3.1.3	Специальные случаи	131
3.1.4	Доказательство теоремы 3.1.1.	134
3.2	Приложения	140
3.2.1	Ключевая лемма	140
3.2.2	Непрерывность по Гельдеру решений	141
3.2.3	Непрерывность по Гельдеру форм	149
3.3	Граничные версии	152
3.3.1	Теорема Т.Г. Латфуллина	152
3.3.2	Модульная версия леммы Морри	160
4	Уравнения и системы	170
4.1	Принцип Фрагмена – Линделефа	170
4.1.1	”Весовые” характеристики закрепленной мембраны	170
4.1.2	Частные случаи	180
4.1.3	Иллюстрирующие примеры	186
4.1.4	Теорема Лиувилля	188
4.1.5	Свободная мембрана	191
4.1.6	Основная частота подмножеств h -сферы	194
4.1.7	Оценки для N -средних	198
4.1.8	β -Изопериметрия	202
4.2	Критические точки решения	205
4.2.1	Основная теорема	205
4.2.2	Псевдогармонические функции	207
4.2.3	Контрпример Мартио	208
4.2.4	N -точки	209
4.2.5	Специальный случай теоремы 2.3.3	210

4.2.6	Условия на многообразии	212
4.2.7	Поведение решения вблизи N -точки	213
4.2.8	Доказательство теоремы 4.2.4	213
4.2.9	Доказательство теоремы 4.2.5	219
4.3	Уравнения типа минимальной поверхности	222
4.3.1	Классы $\mathcal{A}(\alpha)$	222
4.3.2	Теорема Лиувилля	224
4.3.3	Теорема Бернштейна	228
4.3.4	Обобщенный принцип максимума	236
4.3.5	Теорема Берса	250
4.4	Минимальные трубки и ленты	258
4.4.1	Погружения	258
4.4.2	Трубки в полупространстве	262
4.4.3	”Уплотнение” концов	264
4.4.4	Трубки размерности $p \geq 3$	269
4.4.5	Величина образа трубки в грассманиане	272
4.4.6	Предельные множества концов в грассманиане	275
4.5	Уравнение газовой динамики	281
4.5.1	Основные результаты	281
4.5.2	Свойства функции σ	284
4.5.3	Свойства $W_\gamma^-(\varepsilon)$, $W_\gamma^+(\varepsilon)$, $V_\gamma^-(\varepsilon)$ и $V_\gamma^+(\varepsilon)$	287
4.5.4	Доказательства основных утверждений	292
4.5.5	Свойства функции $x_\gamma(\varepsilon)$	297
5	Квазиконформно плоские поверхности	313
5.1	Постановка задачи	313
5.2	Свойства отображения	315
5.2.1	Связь с уравнениями	315
5.2.2	Лемма Лебега – Куранта	321
5.2.3	Неравенство Гарнака	326
5.2.4	D-свойство	330
5.3	Характеристики многообразия	337
5.3.1	Изопериметрический профиль	337
5.3.2	Основная частота и ее N -средние	339
5.3.3	Неравенство В.А. Клячина	345
5.3.4	Два иллюстрирующих примера	352
5.4	Квазиконформно плоские поверхности $\text{codim} = 1$	354
5.5	Квазиконформно плоские поверхности $\text{codim} > 1$	369

6	Отображения с ограниченным искажением	379
6.1	Оценки с использованием изопериметрии	379
6.1.1	Области роста	379
6.1.2	Специальная функция исчерпания	381
6.1.3	Энергетические оценки	383
6.1.4	Альтернатива Фрагмена – Линделефа	392
6.2	Асимптотические свойства	400
6.2.1	Принцип Фрагмена – Линделефа	400
6.2.2	Задача Данжуа – Карлемана – Альфорса	407
6.2.3	Искривленные произведения	410
6.2.4	К контрпримеру Рикмана – Холопайнена	413
6.3	Дополнения к теореме Данжуа – Карлемана – Альфорса	415
6.3.1	Целые функции	415
6.3.2	Размеры асимптотических трактов	419
6.4	Другие версии альтернативы Фрагмена–Линделефа	426
6.4.1	Граничные условия	426
6.4.2	Неравенство типа Пуанкаре – Соболева	427
6.4.3	Рост интеграла энергии	433
6.4.4	Интеграл энергии в специальном случае	436
6.4.5	Другие версии альтернативы	439
7	Почти-решения	442
7.1	Почти-решения	442
7.1.1	(k, p) -Емкость	445
7.1.2	(k, p) -Параболичность	446
7.1.3	Примеры применения	449
7.2	Почти замкнутые формы	455
7.2.1	Лемма о разбиении единицы	456
7.2.2	Особенности дифференциальных форм	461
7.2.3	Доказательство теоремы 7.2.1	462
7.2.4	Доказательство теоремы 7.2.2	466
7.3	Особенности A -решений	472
7.3.1	Решения уравнения газовой динамики	473
7.3.2	Приложения к отображениям с ограниченным искажением	476
7.4	Решения параболических уравнений как почти-решения эллиптических	483
7.4.1	Классы уравнений	483
7.4.2	Решения и почти-решения	485
7.4.3	Основная теорема	486

8	Принцип максимума для разности почти-решений	492
8.1	Классы уравнений	492
8.2	Классы почти-решений	493
8.3	Ключевое свойство	494
8.4	Функция $I(\xi, \eta)$	499
8.5	Принцип максимума	502
8.6	Цилиндрические области	503
8.7	Сильно нелинейные уравнения	507
8.8	Разности почти-решений	508
8.9	Замечания	512
9	Теорема Лиувилля для почти-решений и почти замкнутых форм	514
9.1	Почти-решения	514
9.1.1	Аналог теоремы Лиувилля	516
9.1.2	Примеры применений	520
9.2	Почти замкнутые дифференциальные формы	523
9.2.1	Классы дифференциальных форм	524
9.2.2	Основная теорема	525
9.2.3	Замечания	526
9.2.4	Доказательство теоремы 9.2.1	527
10	Неравенство Гарнака для почти-решений	530
10.1	Подготовительное неравенство	530
10.2	Емкость	533
10.3	Обобщенная форма принципа 'длины и площади'	534
10.4	Основная теорема	535
10.5	Монотонные функции	538
10.6	Почти-решения в шаре	538
11	Теорема о трех сферах для почти-гармонических функций	541
11.1	Теорема Адамара	541
11.2	k -Узкие области	542
11.3	Основная лемма	544
11.4	j -Шар и j -сфера	546
11.5	Обобщенная теорема Адамара	547
11.6	Следствия	549

12 Теорема о двух сферах для почти-решений уравнений типа минимальной поверхности	552
12.1 Почти-решения	552
12.2 Радиально симметричные решения	554
12.3 Основная теорема	556
12.4 Частные случаи	561
12.4.1 Решения уравнения	561
12.4.2 Поверхности заданной средней кривизны	561
13 Некоторые версии альтернативы Фрагмена – Линделефа	564
13.1 Почти-решения A -гармонических уравнений	564
13.2 Емкость и основная частота	566
13.2.1 (k, p) -Емкость	566
13.2.2 m -Допустимые области	567
13.2.3 Основная частота	568
13.2.4 "Узкие" области	568
13.3 Граничные множества	569
13.3.1 Определения	569
13.4 Первая версия	570
13.5 Вторая версия	574
13.5.1 Основная теорема	574
13.5.2 Доказательство	575
13.5.3 Следствия	584
13.6 Усиленные формы принципа Фрагмена – Линделефа для решений	586
14 Почти-квазиконформные отображения	589
14.1 Искажение евклидова расстояния	589
14.1.1 Квазиконформно близкие отображения	589
14.1.2 Интегральные средние	591
14.1.3 Теорема об искажении	600
14.1.4 Условие обратимости	601
14.2 Искажение при $W^{1,p}$ -близких отображениях	603
14.3 Выпуклые и квазивыпуклые области	605
14.4 Приложения к неявным функциям	610
14.5 Вспомогательные оценки	617
14.5.1 Оценка интеграла Дирихле	617
14.5.2 Специальный вариант леммы Морри	619
14.6 Доказательства	620

14.6.1	Доказательство теоремы 14.1.2	620
14.6.2	Доказательство следствия 14.1.2	622
14.6.3	Доказательство предложения 14.1.1	623
14.6.4	Доказательство теоремы 14.2.1	623
14.7	Связь с почти-решениями	626
14.7.1	Основная теорема	626
14.7.2	Доказательство теоремы 14.7.1	628
14.8	Условия дифференцируемости в точке почти-квазиконформных отображений	636
14.8.1	Предварительные понятия	636
14.8.2	Терминология и обозначения	639
14.8.3	Основная теорема. Комментарии	643
14.8.4	Доказательство теоремы 14.8.1	646
Авторский и предметный указатель		651
Список литературы		659