

В.М. Миклюков

**Функции весовых классов Соболева,
анизотропные метрики и вырождающиеся
квазиконформные отображения**

(Издание второе, исправленное и дополненное)

2012 New York, ©UCHIMSYA, LLC

Данная работа является объектом авторского права и находится под охраной Закона РФ "Об авторском праве и смежных правах". Использование данной работы или любой ее части без ссылок на авторов запрещается. Нарушители авторских прав авторов настоящей работы могут быть подвергнуты административному или уголовному преследованию в порядке ст. 7.12 КоАП РФ (Нарушение авторских и смежных прав) или ст. 146 УК РФ (Нарушение авторских и смежных прав).

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Г. Григорьева
канд. физ.-мат. наук, доц. А.Ю. Игумнов
канд. физ.-мат. наук, доц. А.Н. Кондрашов

Предисловие

Монография посвящена изучению функций и отображений с обобщенными в смысле С.Л.Соболева частными производными на n -мерных (в общем случае — анизотропных) поверхностях.

Рассматриваются вопросы, связанные с изучением поведения вблизи границы гомеоморфных отображений $f : D \rightarrow \Delta$ класса $\text{Sob}_\sigma^{l,p}$ областей на таких поверхностях. Для областей евклидова пространства теория соответствия границ при гомеоморфизмах класса $\text{Sob}^{1,n}$ была построена Ж. Лелон-Ферран [LF55], Г.Д. Суворовым [Suv65], [Suv85], [Suv86], их учениками и последователями. Сегодня мы возвращаемся к этой тематике в связи с возникающими потребностями в вопросах триангуляции поверхностей и построения сеток. В изотропном случае см. [SIvan03], [Gar06], [Prok06], [GFZ07], [AGG07], [Azar07], [Mikl06, глава 7] и др.

Настоящая работа вызвана желанием записать некоторые из имеющихся результатов по-новому, применительно к новым задачам, связанным с указанными приложениями. Ключевой момент нашего подхода состоит в использовании модульной техники, развитой в теории конформных и квазиконформных отображений. Наряду с этим, следуя [Suv65], [Ovch72], [Suv85], мы широко используем различные версии ”относительного расстояния” и его оценки, базирующиеся на ”принципе длины и площади”.

Из вопросов общего характера в книге обсуждается проблема аппроксимации функции в окрестности точки и, в частности, проблема существования полного дифференциала функции в точке (в том числе — граничной) и почти всюду в области, указываются признаки вложения пространства $\text{Sob}_\sigma^{l,p}$ в L^q и C^α .

Указываются применения в вопросах существования и единственности вырождающихся квазиконформных отображений с заданным распределением характеристик. Главное отличие используемого здесь подхода от

новейших подходов, применяемых в [ГwMa08], [AIM09], состоит в выделении множества особенностей с тем, чтобы при малости его хаусдорфовой меры уметь доказывать единственность получаемого отображения.

Формулируется ряд нерешенных задач для начинающих исследователей.

Во второе издание добавлена глава, посвященная вырождающимся квазиконформным отображениям с двумя парами характеристик.

Мы будем рады, если книга окажется полезной читателю.

Владимир Михайлович Миклюков

Доктор физико–математических наук, профессор,
Заслуженный деятель науки Российской Федерации
Август 2012, www.uchimsya.info

Содержание

1	Весовые соболевские классы $\text{Sob}_\sigma^{l,p}$	10
1.1	Функциональные классы на подмножествах \mathbb{R}^n	10
1.2	Поверхности в \mathbb{R}^m	12
1.3	Функции класса $\text{Sob}_\sigma^{1,p}$ на поверхности	15
2	Весовой модуль	17
2.1	Определение модуля	17
2.2	Свойства весового модуля	18
2.3	Признаки вложения в L^q и C^α	24
3	Анизотропные метрики	28
3.1	Понятие абстрактной поверхности	28
3.2	Двойственная функция	29
3.3	Псевдометрика	32
3.4	Пополнение по псевдометрике	34
3.5	Модуль и емкость конденсатора	36
3.6	Понятие об NED-множествах	38
3.7	Альтернативное определение модуля	39
4	Следы $\text{Sob}_\sigma^{1,p}$-функций на поверхностях	40
4.1	Спряжляемые множества	40
4.2	μ -Шар и μ -сфера	42
4.3	Модуль семейства дуг на μ -сфере	43
4.4	Условие ограниченности функции на μ -сфере	51
4.5	Условие принадлежности функции классу $L^q(U)$	53
4.6	Непрерывность функции по Гельдеру	54
4.7	Следы на границе	55
4.7.1	Постановка задачи	55

4.7.2	Продолжение функций в псевдометрических пространствах	57
4.7.3	Редуцированная задача	58
4.7.4	Доказательство теоремы 4.7.1	61
5	Аппроксимация функции вблизи особенности	63
5.1	К понятию дифференциала функции в точке	63
5.1.1	Дифференциал во внутренней точке	63
5.1.2	Концы области	64
5.1.3	Дифференциал в граничной точке	65
5.2	Условия единственности дифференциала	66
5.3	Аппроксимация в окрестности особой точки	69
5.3.1	Задача об аппроксимации	69
5.3.2	Основная теорема	70
5.3.3	Условие дифференцируемости	72
5.4	Оценки модуля $\text{mod}_{p,\sigma}\Gamma(y, a; B_D^\nu(a, r))$	73
5.5	Аппроксимация вблизи внутренней точки	76
5.6	Графики со светоконусоподобными особенностями	86
5.7	Аппроксимация вблизи граничной точки	88
5.8	Области с нулевыми углами на границе	91
5.9	Нерешенные задачи	97
6	Условия дифференцируемости почти всюду	98
6.1	К истории вопроса	98
6.2	Слабо монотонные функции	99
6.2.1	Принцип "длины и площади" в \mathbb{R}^n	101
6.2.2	(p, λ) -Условие	107
6.3	Дифференцируемость почти всюду	109
7	Принцип "длины и площади" на поверхности	113
7.1	Двумерный случай	113
7.2	Многомерная версия принципа	118
7.3	Обобщение неравенства Овчинникова – Суворова	123
8	Относительное расстояние Лаврентьева	128
8.1	Относительное расстояние на поверхности	128
8.2	Граница анизотропной поверхности Ω	132
8.3	Простые концы анизотропной поверхности	134
8.4	Классификация простых концов анизотропной поверхности	137

8.5	Искажение относительного расстояния	138
8.6	Теорема типа теоремы Каратеодори	143
9	Относительные расстояния Суворова и Овчинникова	145
9.1	Относительное расстояние I	145
9.2	Граничные элементы и простые концы области	148
9.2.1	Граничные элементы	148
9.2.2	Простые концы	149
9.2.3	Области с компактным пополнением	150
9.3	Относительное расстояние II	152
9.4	Характеристики квазиконформности	156
9.5	Классы отображений	158
9.6	Оценки относительного расстояния	159
10	Пучки компактов в многосвязных областях	165
10.1	Диаметр пучка компактов	165
10.1.1	Сетки	165
10.1.2	Пучки компактов	166
10.1.3	Сетки класса $\gamma_{F,O}(A_1 \dots A_K)$	167
10.1.4	Ориентации сеток	167
10.1.5	$d_{F,O,p}$ -Диаметры пучка	168
10.2	Относительное расстояние III	169
10.2.1	Определение	170
10.2.2	Величина ρ_{\pm} как псевдометрика	170
10.3	Нерешенные задачи	171
11	Классы \widetilde{BL}^{Φ}	172
11.1	Сферическая метрика	172
11.2	Классы Орлича	173
11.2.1	N -Функции	173
11.2.2	Δ_2 -условие	175
11.3	Классы \widetilde{BL}^{Φ} как подклассы классов $\widetilde{Sob}^{1,\Phi}$	177
11.4	Замкнутость классов	180
11.5	Ключевое неравенство	183
11.5.1	Функция $\kappa_0(\varepsilon)$	186
11.5.2	Мажоранта для $\kappa_0(\varepsilon)$	188
11.6	Оценки искажения внутри области	190
11.7	Нормальность	192

11.8	Оценки искажения в замкнутой области	193
11.9	К вопросу о точности оценок	200
11.10	Устойчивость	202
11.11	Сильная монотонность вблизи границы	206
11.11.1	Монотонность и градиент	209
12	Вариационная Ψ-емкость	218
12.1	Понятие Ψ -емкости	218
12.2	Емкость кругового кольца	222
12.3	Свойства функции ν_0	224
12.4	h -Мера Хаусдорфа и Ψ -емкость	227
12.5	Ψ -емкость и линейная мера Хаусдорфа	228
12.6	Выделенные множества и цепи открытых подмножеств	230
13	Вырождающиеся квазиконформные отображения	234
13.1	Комплексная форма записи системы Бельтрами	235
13.2	Аппроксимация	235
13.3	Связи с весовыми соболевскими классами	239
13.4	Специальный класс N -функций	241
13.5	Теорема существования и единственности	245
13.5.1	$W^{1,2}$ -Мажорируемые функции	245
13.5.2	Устранимые особенности конформных отображений	246
13.5.3	Теоремы существования и единственности	250
13.6	Изотермические координаты на поверхностях с особенностями	260
13.6.1	Постановка задачи	260
13.6.2	Основные результаты	262
13.6.3	Доказательство теорем 13.6.1 и 13.6.2	264
14	Вырождающиеся квазиконформные отображения с двумя парами характеристик	265
14.1	Отображения с двумя парами характеристик	265
14.2	Вторая комплексная характеристика	268
14.3	Многосвязные области	270
14.4	Неоднолистные решения	271
14.5	Единственность	273
14.6	Теорема несуществования	274
14.7	σ -Гармонические отображения	280

14.7.1	Связи с весовыми соболевскими классами	281
14.7.2	Существование отображения	281
14.7.3	Свойства предельного отображения	284
14.7.4	Биективность	286
14.7.5	Нормировка	289
14.7.6	Другие нормировки	292
14.7.7	Неограниченные области	293
14.8	Замечания о сильно эллиптических системах	296
14.9	Задачи	299
15	Почти-решения системы Бельтрами	301
15.1	Понятие почти-решения	301
15.2	Оценка уклонения	304
15.3	Условия сходимости почти-решений	307
	Авторский и предметный указатель	317
	Список литературы	324