В.М. Миклюков[1]

О некоторых математических проблемах, возникающих при описании микро- и нанопотоков

Распространено мнение, что математика — изобретение халдейских магов, практиковавших [1] на территории Южной Мессопотамии в первой половине первого тысячелетия до Р. Х. В определенной степени с этим трудно не согласиться. Действительно, и сегодня математика обладает многими характерными чертами, свойственными чародейству и колдовству, с чем безусловно согласится каждый, кто хотя бы раз соприкасался с ней в процессе работы. Вместе с тем, переходя к исследованиям микро- и наномира и расширяя сферу применений математики, невольно задаешься вопросом — а как выглядела бы сегодня математика, если бы халдеи владели микроскопом?

Вглядываясь глубже и глубже в строение материи, халдеи убеждались бы в ее дискретности и анизотропности. Им пришлось бы пытаться описывать движение как суммарный результат неуловимых во времени скачкообразных перемещений, отказываться от абсолютизации идей непрерывности и гладкости при описании мироустройства. В результате математика сегодня выглядела бы существенно по-иному — появились бы новые ее разделы, по-иному были бы расставлены приоритеты в исследованиях. Если, к примеру, дискретная математика, весьма полно разработанная в последнее столетие в связи развитием ЭВМ, смотрелась бы почтенной классикой, то современный анализ, возможно, выглядел бы мальчуганом. Ниже мы коснемся кратко некоторых теоретико – функциональных задач анализа, связанных с проблемами, менее продвинутыми в указанных вопросах нежели дискретная математика.

1 Анизотропность

1.1 Анизотропные функциональные классы

Пусть $p \geq 1$ и $A \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Лебегу множество. Символом $L^p(A)$ обозначается совокупность всех измеримых вещественных функций $f(x)$, определенных почти всюду на A и таких, что

$$\int\limits_A |f(x)|^p \, d\mathcal{H}^n < \infty, \quad d\mathcal{H}^n = dx_1 \cdots dx_n.$$

Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}^1$ – измеримая функция, определенная в U почти всюду. Говорят, что $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$ (локально интегрируема в U со степенью p), если $f \in L^p(U')$ для всякого измеримого подмножества $U' \subset\subset U$.

Символом $B(x, r)$ обозначается n-мерный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x, символом $S^n(x, r)$ – его граница.

[1]Волгоградский государственный университет, лаборатория "Сверхмедленные процессы", `miklyuk@mail.ru`

Если $f \in L^1(U)$, то почти всюду в U выполнено

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{c(n)r^n} \int\limits_{B(x,r)} f(y)\, d\mathcal{H}^n, \quad c(n) = \mathcal{H}^n(B(0,1))\,,$$

(см. [2, лемма 4.4, глава 1]).

Функция $f \in L^1(U)$ называется уточненной, если она обладает свойством (1.1) в каждой точке открытого множества U, в которой она определена. Символами $\grave{L}^p_{\mathrm{loc}}(U)$ ниже обозначаются множества всевозможных уточненных функций классов $L^p_{\mathrm{loc}}(U)$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – гиперплоскость и пусть U_Π означает ортогональную проекцию U на Π. Символом L_ξ будем обозначать прямую, проходящую через точку $\xi \in U_\Pi$ ортогонально Π, символом $l_\xi(U_\Pi)$ – пересечение L_ξ с множеством U.

Функция $f : U \to \mathbb{R}^1$ называется *абсолютно непрерывной внутри* $l_\xi(U_\Pi)$, если, каков бы ни был замкнутый промежуток $[a,b] \subset l_\xi(U_\Pi)$, сужение f на $[a,b]$ является абсолютно непрерывной функцией.[2]

Функция $f : U \to \mathbb{R}^1$ принадлежит классу ACL (абсолютно непрерывна на линиях), если она абсолютно непрерывна внутри сечений $l_\xi(U_\Pi)$ для почти всех $\xi \in U_\Pi$ и всех координатных гиперплоскостей

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = 0\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если функция $f : U \to \mathbb{R}^1$ абсолютно непрерывна на линиях, то для почти всех $x \in U$ существуют частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Определим весовые соболевские функциональные классы $\mathrm{Sob}^{l,p}_\sigma$. Зафиксируем целое $l = 1, 2, \ldots$. Обозначим через

$$I = \{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_l, \quad i_k = 1, 2, \ldots, n\}$$

мультииндекс. Пусть $p \ge 1$ – постоянная и пусть

$$\sigma_I(x) = \{\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_l}(x)\}$$

– набор неотрицательных измеримых, почти всюду конечных функций, определенных на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$.

Говорим, что измеримая функция $f : U \to \mathbb{R}^1$ принадлежит классу $\mathrm{Sob}^{l,p}_\sigma(U)$, если почти всюду в U она имеет частные производные

$$\frac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{l-1}}}(x) \quad (i_k = 1, \ldots, n;\ \ 1 \le k \le l-1)\,,$$

[2] Следуя [3, стр. 19] подчеркнем, что из абсолютной непрерывности функции f внутри $l_\xi(\Pi)$ не следует ее абсолютная непрерывность на множестве $l_\xi(U_\Pi)$.

являющиеся ACL-функциями с производными класса $\grave{L}^p_{\mathrm{loc}}(U)$, подчиненными условию
$$\int\limits_U \left[\sum_{i_1\le i_2\le\ldots\le i_l} \sigma_{i_1 i_2\ldots i_l}(x)\,\left(\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_l}}\right)^2(x)\right]^{p/2} d\mathcal{H}^n<\infty\,.$$

В случае, когда все $\sigma_I\equiv 1$, мы имеем известные функциональные классы W^l_p (см. [4] — [8]).

Пусть $\rho_1,\ldots,\rho_n$ – измеримые по Лебегу на открытом множестве $U\subset\mathbb{R}^n$, неотрицательные функции и $\gamma\subset U$ – локально спрямляемая жорданова дуга или кривая. Мы определяем интеграл
$$\int\limits_\gamma \sum_{m=1}^n \rho_m\,|dx_m|$$
как интеграл от сужения
$$\left.\sum_{m=1}^n \rho_m\,|dx_m|\right|_\gamma\,.$$
Пусть $\sigma_I:U\to\mathbb{R}^1$ – функции вида (1.2) и Γ – множество локально спрямляемых жордановых дуг или кривых $\gamma\subset U$, $p\ge 1$ – постоянная.

Определим взвешенный модуль семейства Γ, полагая
$$\mathrm{mod}_{l,p,\sigma}\Gamma=$$
$$\inf_{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}\frac{\int\limits_U\left[\sum\limits_{k=1}^l\sum\limits_{m=1}^n\sum\limits_{m\le i_2\le\ldots\le i_k}\sigma_{mi_2\ldots i_k}(x)\,\left(\frac{\partial^{k-1}\rho_m}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}\cdots\partial x_{i_k}}\right)^2(x)\right]^{p/2}d\mathcal{H}^n}{\left(\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\int\limits_\gamma\sum\limits_{m=1}^n\rho_m\,|dx_m|\right)^p},$$
где точная нижняя грань берется по всевозможным вектор-функциям $(\rho_1,\ldots,\rho_n)\in\bigcap_{k=1}^l \mathrm{Sob}^{k-1,p}_{\sigma,\mathrm{loc}}(U)$, с производными (1.3), являющимися ACL-функциями класса $\grave{L}^p_{\mathrm{loc}}(U)$.

В случае $l=1$ и все $\sigma_I\equiv 1$ имеем стандартный модуль семейства кривых в евклидовой метрике [9, глава I], [10, глава II].

Относительно "взвешенного" модуля семейства дуг см. также [11, глава 1], [12] — [14].

С использованием модульной техники несложно устанавливаются [15] аналоги известных теорем вложения Соболева в пространства L^q и C^α.

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ – область и $E\subset\overline{D}$ – замкнутое множество. Для произвольной точки $x\in D$ символом $\Gamma(x,E)$ обозначим множество всевозможных связных локально спрямляемых дуг $\gamma\subset D$, соединяющих точку x с множеством E.

Теорема 1.1. *Пусть $l \geq 1$ – целое и $p > 1$, $q > 0$ – постоянные. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^1$ – функция класса $\cap_{k=1}^{l} \mathrm{Sob}_{\sigma}^{k,p}(D)$. Если область $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет конечный объем,*

$$\lim \sup_{x \to E, x \in D} |f(x)| = C(f, E) < \infty$$

и

$$\int\limits_{D} \frac{d\mathcal{H}^n}{\mathrm{mod}_{l,p,\sigma}^{\frac{q}{p}} \Gamma(x, E)} < \infty \,,$$

то $f \in L^q(D)$ так, что

$$\% \int\limits_{D} |f(x)|^q \, d\mathcal{H}^n \leq \int\limits_{D} \left(C(f, E) + \frac{A_{l,p,\sigma}^{\frac{1}{p}}(f, D)}{\mathrm{mod}_{l,p,\sigma} \Gamma(x, E)} \right)^q d\mathcal{H}^n \,.$$

Для произвольной пары точек $x, y \in D$ символом $\Gamma(x, y)$ мы обозначим множество всех локально спрямляемых открытых жордановых дуг γ, лежащих в области D и соединяющих точки x и y.

Теорема 1.2. *Пусть $l \geq 1$ – целое и $p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$ – постоянные. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^1$ – функция класса $\cap_{k=1}^{l} \mathrm{Sob}_{\sigma}^{k,p}(D)$. Если*

$$\sup_{x,y \in D} |x - y|^{-\alpha} \mathrm{mod}_{\mathrm{l,p},\sigma}^{-\frac{1}{\mathrm{p}}} \Gamma(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = c(\alpha, f, D) < \infty \,,$$

то f удовлетворяет условию Гельдера с показателем α в D так, что

$$|f(x) - f(y)| \leq c(\alpha, D) \, |x - y|^{\alpha} \quad \forall x, y \in D \,.$$

1.2 Анизотропные метрики

Метрики $\rho(x, y)$, обладающие в общем случае свойством

$$\rho(x, y) \neq \rho(y, x),$$

называются *анизотропными.*

В определенной степени модельными задачами[3] здесь могут служить задачи на сетях с заданными на них (вообще говоря, анизотропными) метриками Финслера [31, Глава V], [34, Глава 1]. Заметим при этом, что "соответствующая математика" в полном объеме на таких сетях к настоящему времени не построена, хотя отдельные работы, показывающие возможность построения эффективных конструкций имеются

[3]Наверно каждому студенту отлично известно, что расстояние от университета до пивной вовсе не равно расстоянию от пивной до университета; это — совсем разные расстояния.

(см., например, [17], [35], [36]). Остановимся лишь на аналоге относительного расстояния М.А. Лаврентьева [16], введенном в [17].

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. Следуя [11, глава 1], определим *абстрактную поверхность* Ω над областью D. Поверхность будет задана, если будут заданы элементы длин кривых, лежащих на ней, и ее элемент площади.

Обозначим через $\Gamma(D)$ множество всевозможных жордановых локально спрямляемых (в евклидовой метрике) дуг или кривых γ, лежащих в D. Будем считать также, что на каждой из γ указано направление (в частности, от одной концевой точки к другой). Каждая из замкнутых спрямляемых дуг γ может быть задана в виде

$$x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)) : [0, \mathrm{length}\,\gamma] \to D\,,$$

где $0 \le s \le \mathrm{length}\,\gamma$ – длина дуги, отсчитываемой от начальной точки $x(0)$ до текущей точки $x(s)$ в указанном вдоль γ направлении. Локально спрямляемые дуги γ могут быть очевидным образом параметризованы посредством длины дуги, отсчитываемой от фиксированной точки в положительном и отрицательном направлениях вдоль γ.

Предположим, что вдоль каждой из дуг $\gamma \in \Gamma(D)$ задана некоторая вещественнозначная, измеримая по Лебегу, неотрицательная функция $h_\gamma(x)$. Совокупность всех таких функций для семейства дуг $\gamma \in \Gamma(D)$ будем обозначать символом $\mathcal{H} = \{h_\gamma\}$.

Будем говорить, что множество функций $\mathcal{H}$ *согласовано* в точке $a \in D$, если для всех кривых $\gamma \in \Gamma(D)$, проходящих через точку a в одном и том же направлении $\xi \in S(a, 1)$[4], значения $h_\gamma(a)$ совпадают.

Предположим, что множество функций $\mathcal{H}$ согласовано почти всюду в области D. Тем самым, для почти всех $x \in D$ и всех направлений $\xi \in S(x, 1)$ определена неотрицательная функция $H(x, \xi)$. Продолжим H по второй переменной на всю плоскость $\mathbb{R}^2$, пользуясь правилом $H(x, \lambda\,\xi) = \lambda\, H(x, \xi)$, $\lambda = \mathrm{const} \ge 0$. В результате такого продолжения, для всякой $\gamma \in \Gamma(D)$ почти всюду вдоль нее выполнено

$$H(x, dx) = h_\gamma(x)\,|dx|\,. \tag{1.1}$$

Зафиксируем произвольно неотрицательную функцию σ, определенную почти всюду и измеримую в смысле Лебега в D.

Под *абстрактной поверхностью* Ω далее будем понимать всякую тройку (D, H, σ) описанного вида.

Величину

$$ds_\gamma = h_\gamma(x)\,|dx|\,, \tag{1.2}$$

будем называть *элементом длины дуги* $\gamma \in \Gamma(D)$ в точке $x \in D$, а величину

$$d\Omega = \sigma(x)\,dx_1 dx_2 \tag{1.3}$$

– *элементом площади* абстрактной поверхности Ω.

Простейшие примеры абстрактных поверхностей описанного вида доставляют плоскость $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой (случай, в котором $H(x, dx) = |dx|$) и сферической метрикой, где

$$H(x, dx) = \frac{|dx|}{1 + \left(\frac{|x|}{2r}\right)^2} \quad r = \mathrm{const} > 0\,.$$

[4] т.е. имеющих один и тот же касательный вектор в a

В общем случае абстрактная поверхность анизотропна.

Напомним необходимые понятия [18, §21]. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное непустое множество и пусть $r : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ – функция, обладающая свойствами:

$$\begin{array}{lll} \alpha) & r(x,x) & = 0 \text{ и } r(x,y) \geq 0 \text{ при всех } x,y \in \mathcal{X}; \\ \beta) & r(x,y) & \leq r(x,z) + r(z,y) \text{ при всех } \; x,y,z \in \mathcal{X}. \end{array}$$

Пара $(\mathcal{X}, r)$ называется *псевдометрическим пространством,* а функция r – *псевдометрикой.* Заметим, что мы не предполагаем здесь выполнения симметрии псевдометрики r, то есть, в общем случае $r(x,y) \neq r(y,x)$.

В некоторых случаях вместо требования (α) мы будем допускать, что имеет место более сильное предположение

$$\alpha') \quad r(x,x) = 0 \text{ и } r(x,y) > 0 \text{ при всех } x,y \in \mathcal{X}, \; x \neq y\,.$$

Для произвольной пары точек $x', x'' \in D$ определим *расстояние*

$$r_\Omega(x', x'') = \inf \int\limits_\gamma ds_\gamma = \inf \int\limits_\gamma H(x,\, dx)\,,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным (ориентированным) дугам $\gamma \in \Gamma(D)$, ведущим из точки x' в точку x''.

Так как плотности $h_\gamma \in \mathcal{H}$ зависят от направления на дуге, то, вообще говоря, $r_\Omega(x', x'') \neq r_\Omega(x'', x')$. Таким образом, абстрактная поверхность моделирует анизотропную среду. При этом, абстрактная поверхность может также и обладать достаточно массивными множествами особых точек, что позволяет с ее помощью моделировать, например, среды с дислокациями (см. С.К. Годунов, Е.И. Роменский [19, глава II]). Многочисленные примеры физически содержательных абстрактных метрик можно найти в известной книге Ч.В. Мизнера, К.С. Торна, Д.А. Уилера [20], посвященной вопросам гравитации, а также монографии С. Чандрасекара [21], описывающей математическую теорию черных дыр.

Далее для произвольной пары множеств $A, B \subset D$ полагаем

$$\operatorname{dist}^{\pm}_{LH}(A,B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} r_\Omega(x,y) \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}^{\pm}_{RH}(A,B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} r_\Omega(y,x)\,,$$

где знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости от положительной или отрицательной ориентации дуг $\gamma \in \Gamma(D)$, ведущих из точки $x' \in A$ в точку $x'' \in B$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество нулевой линейной меры Хаусдорфа. Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D, H, \sigma)$. Предположим, что $H(x,\xi)$ – функция, определенная и непрерывная при всех $x \in D \setminus E$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^2$, подчинена условиям:

a) $H(x,\xi) \geq 0$ при $x \in D \setminus E$ и $\xi \in \mathbb{R}^2$;

b) в каждой точке $x \in D \setminus E$ множество

$$\Xi(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : H(x,\xi) < 1\}$$

является выпуклым.

Определим двойственную функцию

$$G(x,\eta)=\sup_{\xi\in\Xi(x)}\langle\xi,\eta\rangle,$$

где $\langle\xi,\eta\rangle$ есть стандартное скалярное произведение векторов ξ и η в $\mathbb{R}^2$.

Положим

$$G^+(x)=\sup_{|\eta|=1}\sup_{G(x,\xi)=1}\langle\xi,\eta\rangle.$$

Несложно проверить, что функция $G(x,\eta)$ обладает свойствами (a) и (b). При этом всюду в $D\setminus E$ выполнено

$$G(x,\xi)=\sup_{\eta:H(x,\eta)\neq 0}\frac{\langle\xi,\eta\rangle}{H(x,\eta)}$$

(см. [22, §15]).

В общем случае функция $G(x,\eta)$ принимает на $D\times\mathbb{R}^2$ значения из $\overline{\mathbb{R}}$. Бесконечные значения $G(x,\eta)$ возникают, к примеру, в случаях, когда выпуклое множество $\Xi(x)$ не ограничено. С другой стороны, несложно усмотреть, что множество $\Xi(x)$ ограничено тогда и только тогда, когда $G^+(x)<+\infty$.

Теорема 1.3 *Если H удовлетворяет условиям (a) и (b), то функция r_Ω обладает свойствами (α) и (β) псевдометрики.*

Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$ – односвязная область. Мы будем предполагать D ориентированой так, что на всяком одномерном цикле $C\subset D$ направление обхода считается *положительным*, если ограничиваемая циклом подобласть остается слева. При этом всякая тройка точек a, b, $c\in D$ оказывается ориентированной положительно или отрицательно в зависимости от того является ли положительно или отрицательно ориентированным направление обхода от a к b и, далее, к c произвольной замкнутой жордановой кривой $C\subset D$, содержащей эти точки.

Зафиксируем точку $O\in D$. Для произвольной пары точек a, $b\in D$, отличных от точки O, пусть $\mathcal{R}_1=\mathcal{R}_1(a,b)$ означает семейство всевозможных замкнутых простых жордановых кривых γ, лежащих в $D\setminus\{O\}$ и отделяющих a, b от O. Пусть $\mathcal{R}_2=\mathcal{R}_2(a,b)$ означает семейство всевозможных простых жордановых дуг $\gamma\subset D\setminus\{O\}$, отделяющих a, b от O в D и таких, что $\overline{\gamma}\cap\partial D\neq\emptyset$.

Определим ориентации на кривых и дугах, принадлежащих семействам $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$. Предположим, что точка $x\in D$, $x\neq O$, отделяется от O какой-либо из описанных кривых или дуг γ. Для произвольной жордановой дуги l, соединяющей точку x с точкой O в D и имеющей единственную точку пересечения с γ, полагаем $x_l=l\cap\gamma$. Если $\gamma\in\mathcal{R}_i$ $(i=1,2)$ отделяет пару точек a и b от O, то положительная ориентация γ определяется так, чтобы для любой пары дуг l', l'', соединяющих точки a,b с O и имеющих единственные точки пересечения $a_{l'}=l'\cap\gamma$, $b_{l''}=l''\cap\gamma$ тройки $a_{l'}$, $b_{l''}$, O имели ориентации, совпадающие с ориентацией тройки a, b, O.

Предположим, что имеются односвязная область $D\subset\mathbb{R}^2$ с непустой границей ∂D и заданная над D абстрактная поверхность $\Omega=(D,H,\sigma)$. Зафиксируем точку $O\in D$ и для произвольной пары точек $a,b\in D\setminus\{O\}$ определим *относительное расстояние*:

$$\rho_+(a,b;D\setminus\{O\})=\min\{\rho_1(a,b),\ \rho_2(a,b)\}\,,\tag{1.4}$$

где
$$\rho_i(a,b) = \inf \int\limits_{\gamma} H(x,dx) \quad (i=1,2)\,,$$
величина $H(x,dx)$ определяется соотношением (1.1) и точные нижние грани берутся по всевозможным положительно ориентированным жордановым локально спрямляемым кривым или дугам $\gamma \in \mathcal{R}_i(a,b)$ соответственно.

Если при определении величин $\rho_i(a,b)$ точные нижние грани берутся по всевозможным отрицательно ориентированным жордановым локально спрямляемым кривым или дугам $\gamma \in \mathcal{R}_i(a,b)$ $(i=1,2)$, то вводимое расстояние (1.4) будем обозначать символом $\rho_-(a,b;D\setminus\{O\})$.

В случае $H(x,\xi)=|\xi|$ расстояния
$$\rho_+(a,b;D\setminus\{O\})\,, \quad \rho_-(a,b;D\setminus\{O\})$$
совпадают и представляют собой относительное расстояние М.А. Лаврентьева [16] (см. также [23], [24, глава VIII, часть I] и [25]).

Теорема 1.4. *Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$ – область и $O\in D$ – фиксированная точка. Пусть $H(x,\xi): D\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ – непрерывная функция.*

i) Если $H(x,\xi)\geq 0$ всюду на $D\times\mathbb{R}^2$, то относительные расстояния $\rho_\pm(a,b;D\setminus\{O\})$ удовлетворяет аксиомам (α) и (β) псевдометрики.

ii) Если $E\subset D$ – замкнутое относительно D множество нулевой линейной меры Хаусдорфа, $O\in D\setminus E$ и $H(x,\xi)>0$ при всех $x\in D\setminus E$ и всех $\xi\in\mathbb{R}^2$, то относительные расстояния $\rho_\pm(a,b;D\setminus\{O\})$ удовлетворяет аксиомам (α') и (β).

Пусть D_1, $D_2\subset\mathbb{R}^2$ – односвязные области, $D_1\neq\mathbb{R}^2$ и $O_1\in D_1$, $O_2\in D_2$ – фиксированные точки. Пусть $\Omega_1=(D_1,H_1,\sigma_1)$ и $\Omega_2=(D_2,H_2,\sigma_2)$ – абстрактные поверхности с элементами длины и площади вида (1.2), (1.3), заданные над областями D_1 и D_2 соответственно. Мы будем предполагать здесь, что функции $H_i(\cdot,\xi)$ $(i=1,2)$ суть функции вида (1.1), непрерывны в $D_i\times\mathbb{R}^2$ и подчинены условиям
$$c_{i1}|\xi|\leq H_i(\cdot,\xi)\leq c_{i2}|\xi|\,, \quad c_{ij}(F_i)=\mathrm{const}>0\,,$$
на всяком компактном подмножестве $F_i\subset D_i$.

Пусть $y=f(x)$ – гомеоморфное отображение области D_1 на область D_2, принадлежащее классу $\mathrm{ACL}^2_{\mathrm{loc}}(D)$ и обладающее свойством $f(O_1)=O_2$.

Пользуясь соотношением (1.4), введем относительные расстояния
$$\rho_\pm(x',x'';D_1,O_1) \quad \text{и} \quad \rho_\pm(y',y'';D_2,O_2)\,.$$

Укажем некоторые оценки искажения относительного расстояния при отображении $f: D_1\to D_2$. Пусть
$$\delta(x,y)=\inf_{\gamma_{x,y}}\int\limits_{\gamma_{x,y}} H_1(x,dx)\,,$$
где $\gamma_{x,y}$ – произвольная, локально спрямляемая дуга в D_1, соединяющая точку $x\in D_1$ с точкой $y\in D_1$.

Положим
$$r(D_1) = \inf_{y\in\partial D_1} \delta(O_1, y)\,.$$

Установлена следующая оценка относительного расстояния при гомеоморфизмах с обобщенными производными, обобщающая теорему М.А. Лаврентьева [16].

Теорема 1.5. *Пусть $f : D_1 \to D_2$ – сохраняющее ориентацию гомеоморфное отображение класса $\mathrm{ACL}^2_{\mathrm{loc}}(D)$, подчиненное условиям: $f(O_1) = O_2$ и*
$$I(f) = \sup_{y\in D_1} \int\limits_{D_1} \frac{H_2^2\left(f(x), \nabla_\mu f\right)}{H_1^2\left(x, \frac{(\nabla\mu)^\perp}{|\nabla\mu|}\right)}\, \sigma_1\, dx_1 dx_2 < \infty\,, \quad \mu = \delta(x,y)\,.$$

Тогда для любой пары точек $p, q \in D_1$, удовлетворяющей условию
$$\rho_\pm(p,q;D_1,O_1) < \min\left\{1,\, \frac{1}{16}\, r^4(D_1)\right\}\,,$$
выполнено
$$\rho_\pm\left((f(p), f(q); D_2, O_2\right) \le K \left(\int\limits_{\rho_\pm(p,q;D_1,O_1)}^{\sqrt{\rho_\pm(p,q;D_1,O_1)}} \frac{dt}{\int\limits_{\Sigma_\mu(t)} \hbar_1^3(x) \dfrac{|dx|}{\sigma_1(x)}} \right)^{-1/2}.$$

Здесь
$$\hbar_1(x) = \sup_{|\xi|=1} H_1(x,\xi), \quad K = \sqrt{I(f)}$$
и
$$\rho_\pm(p,q;D_1,O_1), \quad \rho_\pm\left((f(p), f(q); D_2, O_2\right)$$
одновременно суть
$$\rho_+(p,q;D_1,O_1), \quad \rho_+\left((f(p), f(q); D_2, O_2\right)$$
или
$$\rho_-(p,q;D_1,O_1), \quad \rho_-\left((f(p), f(q); D_2, O_2\right).$$

Исследовано соответствие границ при гомеоморфизмах с обобщенными производными [17].

2 Сверхмедленные процессы

Имеются мошки, живущие всего один день и успевающие за этот день пройти весь жизненный цикл: родиться, приобрести навыки для дальнейшей жизни, воспроизвести потомство, умереть. Для них наш год значит столько же, сколько для нас три с половиной столетия, а наши десять лет для них — как для нас период, прошедший со времени появления халдеев на арене истории.

Современная наука еще не научилась исследовать в подробностях жизнь таких мошек[5]. Да и происходящее в свои тысячелетия мы вряд ли понимаем до конца, поскольку для такого понимания необходимо умение моделировать "спрессованное" (и "растянутое") время. Некоторые возможности для этого открывает концепция "сверхмедленного процесса".

Под ″сверхмедленными″ мы понимаем процессы, текущие величины в которых меняются столь незначительно, что зафиксировать эти изменения трудно или даже совсем невозможно, ввиду их малости по сравнению с погрешностью измерений. Изменения величин становятся заметными лишь по прошествии достаточно длительного времени.

Многочисленные примеры сверхмедленных процессов доставляют процессы старения — от старения живых организмов до старения строительных конструкций и спутников.

″Сверхмедленные процессы″ — важнейшее понятие при характеризации некоторых процессов головного мозга (см., например, в [30] краткие описания работ Н.А. Аладжаловой [1979], В.А. Илюхиной [1982], В.А. Илюхиной, З.Г. Хабаевой, Л.И. Никитиной и др [1986], И.Б. Заболотских, А.Ф. Ямпольского [1996], И.В. Филиппова [2007]).

Однако сверхмедленными являются не только и не столько физиологические процессы, но и значительный ряд других природных процессов, ввиду их сверхмедлительности, выпадающих за пределы традиционных естественнонаучных исследований. Уважаемый читатель сам укажет подобные лакуны, имеющие место быть в астрономии, физике, механике, экономике, лингвистике, экологии и др.

К примеру, при течениях жидкости в тонких и длинных трубках возникают ″зоны стагнации″ — области, в которых потоки почти неподвижны. Если отношение длины трубки к ее диаметру велико, то потенциальная функция и функция тока почти неизменны на весьма протяженных участках. Ситуация кажется малоинтересной, однако если мы вспомним, что эти незначительные изменения происходят на сверхдлинных интервалах, то мы увидим здесь целую серию первоклассных задач, требующих разработки специальных математических методов.

Априорная информация относительно зон стагнации способствует оптимизации вычислительного процесса за счет замены искомых функций соответствующими постоянными в таких зонах. Иногда это делает возможным существенно сократить объем вычислений, что было замечено ранее, к примеру при приближенных вычислениях конформных отображений сильно вытянутых прямоугольников.

Получаемые результаты оказываются небесполезными, в частности, для приложений в экономической географии. В случае, когда функция характеризует интенсивность товарообмена на том либо ином географическом пространстве, теоремы о

[5]Кстати, и что представляют собой для сегодняшней мошкары проблемы нынешнего мирового финансового кризиса? И не существуют ли организмы, продолжительность жизни которых по сравнению с нашей столь же велика, как наша по сравнению сжизнью мошкары? И там ли мы пытаемся искать "братьев по разуму"?

ее зонах стагнации дают (при надлежащих ограничениях на выбираемую модель) оценки геометрических размеров зоны стагнации мира-экономики. К примеру, если поддуга границы области абсолютно нетранспарентна, а поток векторного поля градиента функции через остальную часть границы достаточно мал, то область является для этой функции зоной стагнации (ср. [32, стр. 18-19]).

Теоремы о зонах стагнации оказываются тесно связанными с предлиувиллевыми теоремами — оценками колебания решений, прямыми следствиями которых являются различные версии классической теоремы Лиувилля об обращении в тождественную постоянную целой двоякопериодической функции.

Выяснение параметров влияния на размеры зон стагнации, открывает возможность практических рекомендаций к целенаправленным изменениям конфигурации и, в частности, уменьшению либо увеличению таких зон.

Краткий обзор результатов, полученных в данном направлении, можно найти в [33]. Здесь мы остановимся лишь на некоторых признаках зоны стагнации на поверхности [41].

Рассмотрим поверхность $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, заданную над областью $D \subset \mathbf{R}^n$ посредством локально билипшицевой вектор-функции

$$f = (f_1(x), \dots, f_m(x)) : D \to \mathbf{R}^m\,,\ \ x = (x_1, \dots, x_n) \quad n < m\,.$$

Согласно теореме Радемахера – Степанова вектор – функция $f(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в области D и почти всюду в D определены измеримые по Лебегу коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Ω

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle\,, \quad i,j = 1,2,\dots,n.$$

Положим

$$g(x) = \det\left(g_{ij}(x)\right)\,, \quad d\Omega = \sqrt{g(x)}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\,,$$
$$g^{ij}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}\,, \quad i,j = 1,\dots,n\,,$$

Пусть D – область на поверхности Ω, гомеоморфная шару $B^n(0,1)$ в $\mathbf{R}^n$ и пусть $g : D \to B^n(0,1)$ – некоторый гомеоморфизм D на шар. Зафиксируем замкнутые непересекающиеся подмножества P, $Q \subset \partial B^n(0,1)$ и обозначим через $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ множества всевозможных последовательностей $\{x_k\}$, лежащих в D и таких, что $g(x_k) \to P$, $g(x_k) \to Q$ соответственно.

Будем говорить, что *подобласть* $U \subset D$ *примыкает к* $\mathcal{P}$, если найдется последовательность $\{x_k\} \in \mathcal{P}$, лежащая в U.

Всякую тройку множеств вида $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$ будем называть *конденсатором.*

Пусть $D \subset\subset \Omega$ – область на поверхности и пусть

$$A : \bigwedge^n(T(D)) \to \bigwedge^n(T(D))$$

– отображение, определенное почти всюду на слоении $\bigwedge^n(T(D))$ касательных n-ковекторов.

Предположим, что для почти всех $y \in D$ отображение A определено на пространстве $\bigwedge^n(T_y(D))$ касательных n-ковекторов, то есть, для почти всех $y \in D$ отображение

$$A(y,\ .\ ) : \xi \in \bigwedge^n(T_y(D)) \to \bigwedge^n(T_y(D))$$

определено и непрерывно. Мы предполагаем, что отображение

$$y \mapsto A(y, \Psi)$$

измеримо для всех измеримых n-ковекторных полей Ψ и

$$A(y, \lambda\xi) = \lambda\,|\lambda|^{p-2}\,A(y,\xi)\,, \quad \lambda \in \mathbf{R}^1\,. \tag{2.1}$$

Предположим, что для почти всех $y \in D$ и всех $\xi \in \bigwedge^n(T_y(D))$ мы имеем

$$|A(y,\xi)|_\Omega^{p/(p-1)} \leq \nu\,\langle \xi, A(y,\xi)\rangle_\Omega\,, \tag{2.2}$$

при $p \geq 1$ и с некоторой постоянной $\nu > 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{div}_\Omega\, A(y, \nabla_\Omega h) = a\,|h|^{p-2}\,\frac{\partial h}{\partial t}(y,t)\,, \quad a = \mathrm{const} > 0\,. \tag{2.3}$$

В случае $p = 2$ имеем стандартное уравнение теплопроводности. В случае $a = 0$ мы будем называть решения h уравнения (2.3) $\mathcal{A}$-*гармоническими* функциями [26, глава 6].

Для произвольной локально липшицевой функции $\phi : D \subset \Omega \to \mathbf{R}$, мы обозначаем через $D_b(\phi)$ множество всех точек $a \in D$, в которых ϕ не имеет полного дифференциала. Символом $D_b(\Omega)$ ниже обозначается множество точек $y \in \Omega$, в которых Ω не имеет касательной плоскости.

Пусть $U \subset D$ – подобласть и пусть $\partial' U = \partial U \setminus \partial D$ – ее относительная граница. Если множество $\partial' U$ является $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ – спрямляемым, то оно имеет локально конечный периметр в смысле Де-Джорджи и $\mathcal{H}^{n-1}$ – почти всюду на ∂U существует единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ (см. [27], разделы **3.2.14, 3.2.15**).

Определим понятие обобщенного решения уравнения (2.3) с нулевыми граничными данными Неймана на некоторых, наперед заданных участках границы области. Рассмотрим конденсатор $(D, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ на поверхности Ω. Подобласть $U \subset D$ назовем *допустимой*, если U не примыкает ни к $\mathcal{P}$, ни к $\mathcal{Q}$ и имеет $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ – спрямляемую относительную границу.

Локально липшицева функция $h : D \to \mathbf{R}$ является обобщенным решением уравнения (3)*, если для всякой допустимой подобласти $U \subset D$ и произвольной функции $\phi \in \mathrm{Lip}(\overline{U})$ со свойствами*

$$\mathcal{H}_\Omega^{n-1}\left(\partial' U \cap \left((D_b(\phi) \cup D_b(\Omega)\right)\right) = 0$$

выполнено

$$\int\limits_{\partial' U} \phi \langle A(y, \nabla_\Omega h), \mathbf{n}\rangle_\Omega \, d\mathcal{H}_\Omega^{n-1} = \tag{2.4}$$

$$= \int\limits_U \langle \nabla_\Omega \phi, A(y, \nabla h)\rangle_\Omega \, d\mathcal{H}_\Omega^{n-1} + a \int\limits_U \phi\, |h|^{p-2}\, \frac{\partial h}{\partial t}\, d\mathcal{H}_\Omega^{n-1}\,.$$

Простые соображения показывают, что в случае гладкой поверхности Ω, гладкой границы ∂D, гладких A_i $(i = 1, \dots, n)$ и C^2-функции h выполнение (2.4) влечет соотношение (2.3) с граничным условием

$$\langle A(y, \nabla h), \overline{n} \rangle_\Omega = 0 \tag{2.5}$$

всюду на ∂D вне граничного множества $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ (см. [28, раздел 9.2.1]). Ниже мы будем говорить, что данное определение описывает $\mathcal{A}$-гармонические функции h с граничным условием (2.5) на указанном множестве.

Рассмотрим конденсатор $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$ на поверхности Ω и обозначим через $\mathcal{F}$ – множество локально липшицевых функций $\phi(y) : D \to (0, +\infty)$, обладающих свойствами:

$$\lim_{\{y_k\} \in \mathcal{P}} \phi(y_k) = 0\,, \qquad \lim_{\{y_k\} \in \mathcal{Q}} \phi(y_k) = 1 \tag{2.6}$$

и таких, что для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{D'} |\nabla_\Omega \phi(y)|_\Omega < \operatorname*{ess\,sup}_{D'} |\nabla_\Omega \phi(y)|_\Omega < \infty\,. \tag{2.7}$$

Зафиксируем постоянное векторное поле $A(y, \xi)$ и определим A-емкость конденсатора $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$, полагая

$$\operatorname{cap}_A(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D) = \inf_{\phi \in \mathcal{F}} \int\limits_D \langle A(y, \nabla_\Omega \phi), \nabla_\Omega \phi \rangle_\Omega \, d\mathcal{H}^n\,, \tag{2.8}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным функциям ϕ со свойствами (2.6), (2.7).

В частном случае $A(y, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ при $p = 2$ мы имеем обычную гармоническую емкость конденсатора на поверхности, а при $p = n$ – конформную емкость [29, глава 2].

Пусть $D \subset \Omega$ – ограниченная область, $(\tau_0, \tau) \subset \mathbf{R}$, и пусть

$$h = h(y, t) : D \times (\tau_0, \tau) \to \mathbf{R}$$

– обобщенное решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условиям (2.2). Мы будем предполагать, что при всех $t > 0$ выполнено

$$h|_{\mathcal{P}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial h}{\partial \overline{n}}\right|_{\partial D \setminus \mathcal{P}} = 0\,,$$

где $\mathcal{P}$ – некоторое граничное множество (случай $\mathcal{P} = \emptyset$ не исключается).

Положим

$$\lambda_{\mathcal{P}}(D) = \inf_\phi \frac{\int\limits_D |A(y, \nabla_\Omega \phi)|^{p/(p-1)} \, d\mathcal{H}^n_\Omega}{\int\limits_D |\phi|^p \, d\mathcal{H}^n_\Omega}$$

и точная нижняя грань берется по всевозможным функциям ϕ, удовлетворяющим условиям
$$\phi|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial \overline{n}}\right|_{\partial D\setminus \mathcal{P}} = 0\,.$$

Теорема 2.1. *Если при всех $t > t_0$ решение уравнения* (2.3), *удовлетворяющего предположениям* (2.2), *подчинено условию*
$$h|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial \overline{n}}\right|_{\partial D\setminus \mathcal{P}} = 0\,,$$
то при любых τ', τ'', $\tau_0 < \tau' < \tau'' < \tau$, выполнено
$$\|h(y,\tau')\|_{L^p(D)} \leq \|h(y,\tau'')\|_{L^p(D)} \exp\left\{\frac{p}{2a\,\nu}\,\lambda_{\mathcal{P}}(D)\,(\tau' - \tau'')\right\}\,.$$

В частности, если для некоторого $s > 0$ выполнено
$$\|h(x,\tau'')\|_{L^p(D)} \exp\left\{\frac{p}{2a\,\nu}\,\lambda_{\mathcal{P}}(D)\,(\tau' - \tau'')\right\} < s\,, \tag{2.9}$$
то множество $D \times [\tau', \tau'']$, $t_0 < \tau' < \tau'' < \tau$, является s-зоной решения h.

Условию (2.9) можно удовлетворить, например, если величина $\tau'' - \tau'$ достаточно велика или достаточно мала норма $\|h(y,\tau'')\|_{L^p(D)}$.

В случае гармонических в $\mathbf{R}^2$ функций см. [28, раздел 9.2].

Теорема 2.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – n-мерная локально билипшицева поверхность и $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; D)$ – произвольный конденсатор в Ω. Пусть h – локально липшицево решение уравнения* (2.1) – (2.3) *с обобщенным граничным условием* (2.5) *на $\partial D \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$, для которого*
$$\mathcal{I} - s_2 \equiv \inf_{\Sigma} I(\Sigma) - s_2 > 0\,.$$
Тогда для произвольной пары непересекающихся $(n-1)$-мерных поверхностей $\Sigma_1 = \Sigma(\tau')$ и $\Sigma_2 = \Sigma(\tau'')$, лежащих в D и разделяющих $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ выполнено
$$\left(\frac{\mathcal{I} - s_2}{\mathrm{cap}_A\,(\Sigma_1, \Sigma_2; U)}\right)^{1/p} \leq \sup\{y' \in \Sigma_1,\ y'' \in \Sigma_2 :\ |h(y') - h(y'')|\}\,.$$
Здесь U – подобласть D, заключенная между сечениями Σ_1, Σ_2.

3 Почти-решения

Ниже приводится краткое описание работ, посвященных почти решениям нелинейных уравнений с частными производными. В большинстве приложений дифференциальных уравнений в естествознании на самом деле мы имеем дело не с (идеальными) решениями уравнений, но с функциями, "близкими" к истинным решениям. В процессе приближенного вычисления мы также находим лишь функцию, "близкую" к истинному решению.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}$ – измеримая по Лебегу функция такая, что для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{D'} k(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{D'} k(x) < \infty\,.$$

Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x,\xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x \in D \to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения

$$\mu_1\, k(x)\, |\xi|^p \le \langle \xi, A(x,\xi)\rangle\,, \qquad |A(x,\xi)| \le \mu_2\, k(x)\, |\xi|^{p-1}\,,$$

где $\mu_1,\ \mu_2 > 0$ и $p \ge 1$ – некоторые постоянные.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0\,. \tag{3.1}$$

Данное уравнение содержит как частный случай уравнение для p-гармонических функций, где предполагается $p > 1$. Допущение $p = 1$ позволяет включить в рассмотрения уравнение минимальной поверхности, уравнение максимальной поверхности в пространстве Минковского, а также уравнение газовой динамики.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^{1,p}_{\rm loc}(D)$ является *почти-решением* уравнения (3.1), если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(x) \in W^{1,q}(D)\,, \quad 0 \le |\varphi(x)| \le 1\,,$$

с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ выполнено:

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla h)\rangle\, dx \right| < \varepsilon\,.$$

Величину $\varepsilon > 0$ будем называть *уклонением* почти-решения h.

Нетрудно видеть, что всякая C^2-функция $h : D \to \mathbb{R}^1$ такая, что $|\mathrm{div} A(x,\nabla h)| \le \varepsilon_1$, является почти-решением (3.1) с уклонением $\varepsilon_1\, \mathcal{H}^n\,(D)$.

Понятие почти-решения было введено в нашей работе [37] в связи с изучением решений с особенностями уравнения (3.1). Показано, что при определенных условиях решение (3.1), даже имеющее неустранимые особенности, может являться почти-решением. Даны оценки его уклонения.

В работе [38] устанавливаются связи почти-квазиконформных отображений в смысле Каллендера с почти-решениями уравнений вида (3.1).

В работе [39] нами доказывается специальная форма принципа максимума для разности почти-решений.

Теорема 3.1. *Пусть $h_1\,, h_2$ – почти-решения с уклонениями $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ уравнения (3.1), удовлетворяющие на границе области предположению*

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\, x_0 \in \partial D}} \left(h_1(x) - h_2(x)\right) \le 0 \quad \forall x_0 \in \partial D.$$

Тогда либо $h_1(x) \le h_2(x)$ всюду в D, либо открытое множество

$$\mathcal{O} = \{x \in D : (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и

$$\int\limits_{\{|x|<r\} \cap \mathcal{O}} k(x)\,|\nabla(h_2 - h_1)|^2\,d\mathcal{H}^n \le \frac{2M}{\mu_1}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,, \quad M = \sup_D |h_2(x) - h_1(x)|\,.$$

В работах [40] — [42] указываются размеры зон стагнации почти-решений уравнений эллиптического и параболического типов.

В работе [43] приводится некоторая специальная версия неравенства Гарнака для почти-решений. Именно, доказана следующая

Теорема 3.2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и U, V – ее подобласти, $V \subset\subset D$. Пусть h – положительное почти-решение в D уравнения (3.1) с $k \equiv 1$, $p > n-1$ и*

$$A(x, \lambda\xi) = \lambda\,|\lambda|^{p-2}\,A(x,\xi) \quad \forall x \in D \text{ и } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^1\,. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\inf_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\} \le \exp\{\,\theta_p(V,U,D)\}\,\sup_{\mathcal{O}_C} \min\{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\}\,,$$

где точная нижняя и точная верхняя грани берутся по всевозможным непустым открытым подмножествам $\mathcal{O}_C \subset D$, $D \backslash \mathcal{O}_C \ne \emptyset$, таким, что $h|_{\partial\mathcal{O}_C} = C$, $C = \mathrm{const}$, и $\theta_p(V,U,D)$ – некоторая постоянная (вид которой указывается).

В случае, когда почти решение монотонно в смысле Лебега, открытые подмножества $\mathcal{O}_C$ указанного вида отсутствуют и теорема 3.2 принимает стандартный вид.

В работе [44] устанавливается связь решений уравнений параболического типа с почти-решениями подходящих уравнений эллиптического типа. Именно, доказана

Теорема 3.3. *Пусть $h = h(x,t) : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1$ – обобщенное решение уравнения*

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = B(t, h, h'_t)\,,$$

где $A(x,\xi)$ удовлетворяет условию (3.2),

$$B(t,h,h'_t) = b_0(t)\,|h|^{p-2}\,h + b_1(t)\,|h|^{p-2}\,h\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$$

и

$$b_0(t) > 0,\; b_1(t) : (\tau_0, \tau_1) \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

– *локально липшицевы на* (τ_0, τ_1) *функции.*

Тогда $h(x,t)$ *является почти-решением некоторого уравнения вида* (3.1), *а уклонение* $s(\tau_0, \tau_1)$ *почти-решения определяется выражением*

$$s(\tau_0,\tau_1) = \int\limits_D d\mathcal{H}^n \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \left| b_0\,|h|^{p-2}h + b_1\,|h|^{p-2}h\,h_t' - \frac{d}{dt}\left(b_1\,|h_t'|^{p-2}h_t'\right) \right| dt\,.$$

Близкие утверждения имеют место и для решений уравнений гиперболического типа.

Некоторые приложения к вопросам устранения особенностей решений уравнения газовой динамики и отображений с ограниченным искажением см. в главе 7 нашей книги [45].

В работе [46] доказывается аналог теоремы Адамара о трех окружностях для почти p-гармонических функций, определенных в областях типа шарового слоя. Доказательство базируется на принципе максимума для разности почти p-гармонических функций.

Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{div}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h) = 0\,, \quad p > 1. \tag{3.3}$$

Почти решения с уклонением $\varepsilon = 0$ являются *обобщенными решениями*. Обобщенные решения h уравнения (3.3) называются также *p-гармоническими* функциями, а само уравнение (3.3) – p-гармоническим (см. [47]).

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}^1$ – измеримая по Лебегу, неотрицательная и почти всюду конечная функция.

Пусть A, B – непустые, замкнутые относительно D, непересекающиеся подмножества. Обозначим через

$$\mathrm{cap}_k\,(A,B) = \inf_u \int\limits_D k(x)\,|\nabla u|^2\,d\mathcal{H}^n, \quad u \in C^1(D)\,, \quad u|_A \equiv 0, \quad u|_B \equiv 1\,,$$

взвешенную k-емкость конденсатора $(A,B;D)$ и через

$$\lambda_k(\mathcal{O}) = \inf_u \frac{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,|\nabla u|^2 d\mathcal{H}^n}{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,u^2 d\mathcal{H}^n}\,, \quad u \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\overline{\mathcal{O}}), \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0,$$

– взвешенную основную частоту открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является *k-узкой* в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{cap}_k\,(D_r, D \setminus D_R) = 0\,,$$

где $D_t = \{|x| < t\} \cap D$.

Ниже приводится обобщение теоремы о трех окружностях на случай p-гармонических функций $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$, заданных в j-шарах в $\mathbb{R}^n$, определяемых следующим образом. Зафиксируем целое j, $1 \le j \le n$ и вещественное число $t \ge 0$. Множества

$$B_j(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_j(x) < t\} \text{ и } \Sigma_j(t) = \partial B_j(t), \text{ где } d_j(x) = \Big(\sum_{i=1}^{j} x_i^2\Big)^{1/2},$$

мы будем называть соответственно j-шаром и j-сферой в $\mathbb{R}^n$. При $j = n$ шар $B_j(t)$ совпадает со стандартным евклидовым шаром $B^n(0,t)$ и сфера $\Sigma_j(t)$ есть евклидова сфера $S^{n-1}(0,t)$. В частности, символ $\Sigma_j(0)$ определяет j-сферу радиуса 0, т.е.

$$\Sigma_j(0) = \{x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) : x_1 = \ldots = x_j = 0\}\,.$$

Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$ – фиксированные числа и пусть

$$D^j_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha < d_j(x) < \beta\}.$$

При $j = 1$ множество $D^j_{\alpha,\beta}$ есть слой, расположенный между двумя параллельными гиперплоскостями. При $1 < j < n$ граница области $D^j_{\alpha,\beta}$ состоит из двух цилиндрических поверхностей.

Пусть $v \in C^0(D^j_{r,R})$, и пусть

$$M(r) = \limsup_{x \to \Sigma_j(r)} v(x)\,.$$

Рассмотрим функцию

$$v_{r,R}(x) = \frac{v(x) - M(r)}{M(R) - M(r)}, \quad r < R.$$

Теорема 3.4. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < r < R \le \infty$. Пусть $v(x) \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D^j_{r,R})$ – неотрицательное почти решение уравнения (3.3) в области $D^j_{r,R}$, $1 \le j \le n$, с уклонением $\varepsilon > 0$ и пусть $M(t) = \sup_{\Sigma_i(t)} v(x)$. Тогда при всех $t \in (r,R)$ таких, что*

$$\Sigma_j(t) \cap \mathcal{O} = \emptyset\,, \quad \mathcal{O} = \{x \in D^j_{r,R} : v_{r,R}(x) - u(x) > 0\}\,,$$

выполнено

$$M(t) \le (M(R) - M(r)) u_0^{j,p}(t) + M(r),$$

При этом, если открытое множество $\mathcal{O}$ не пусто, то

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)\, |\nabla(v_{r,R}(x) - u(x))|^2 \, d\mathcal{H}^n \le \frac{A}{\mu_1}\, \varepsilon +$$

$$+2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 A^2 \operatorname{cap}_k(\mathcal{O}_r, \mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_R)\,,$$

где

$$A = \sup_{D^j_{r,R}} |v_{r,Q}(x) - u(x)|$$

и

$$k(x) = \int\limits_0^1 |\lambda\nabla v(x) + (1-\lambda)(M(R)-M(r))\,\nabla u(x)|^{p-2}\,d\lambda\,.$$

В случае $j = p = n$ имеем

$$\xi(r,t) = \ln\frac{t}{r} \quad \text{и} \quad u_0^{n,n}(t) = \frac{\ln(t/r)}{\ln(R/r)}$$

и, тем самым, из теоремы 3.4 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть* $0 < r < R \le \infty$ *и пусть* $v(x) \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D^n_{r,R})$ *– неотрицательное почти решение уравнения* (1) *с* $p = n$ *и уклонением* $\varepsilon > 0$ *в шаровом слое*

$$D^n_{r,R} = \{r < |x| < R\}\,.$$

Тогда при всех $t \in (r,R)$ *таких, что*

$$\Sigma_n(t) \cap \mathcal{O} = \emptyset\,, \quad \mathcal{O} = \{x \in D^n_{r,R} : v_{r,R}(x) - u(x) > 0\}\,,$$

выполнено

$$M(t)^{\ln(R/r)} \le M(r)^{\ln(R/t)}\, M(R)^{\ln(t/r)}\,,$$

При этом, если открытое множество $\mathcal{O}$ *не пусто, то имеет место указанная в теореме* 3.4 *оценка его размеров.*

В работе [48] рассматриваются почти решения сильно нелинейных уравнений эллиптического типа, включая уравнение минимальных поверхностей. Приводится специальная версия теоремы Адамара о трех окружностях. При этом в отличие от случая p-гармонических функций для оценки максимума функции на внутренней окружности достаточно знания максимума только на внешней, что является проявлением эффекта сильной нелинейности уравнения (см., например, главу VI монографии [49]).

Пусть $\sigma(\tau) : [0, q^2) \to (0,\infty)$ – функция, принадлежащая классу C^1 на полуинтервале $[0,q^2)$, $0 < q \le \infty$, и такая, что существует предел

$$q\sigma(q^2) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau\to q} \tau\sigma(\tau^2) < \infty\,,$$

а функция

$$\sigma^*(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\tau) + 2\tau\sigma'(\tau) > 0\,.$$

Рассмотрим уравнение
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma(|\nabla f|^2) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0 \,.$$

Функция $h(\tau) = \sqrt{\tau}\sigma(\tau)$ строго монотонна. Обозначим через $H = h^{-1}$ обратную к ней функцию. Предположим, что
$$\int\limits_{r_0} H \left[\frac{q\sigma\left(q^2\right) r_0^{n-1}}{s^{n-1}} \right] ds < \infty \,.$$

При выполнении данного условия полагаем
$$\Phi_0(r) = \int\limits_{r_0}^{r} H \left[\frac{q\sigma\left(q^2\right) r_0^{n-1}}{s^{n-1}} \right] ds \,.$$

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, определенная в шаровом слое
$$D_{r_0 r_1} = B(r_1) \setminus \overline{B(r_0)}, \quad \text{где} \quad 0 \le r_0 < r_1 \le \infty,$$
и пусть
$$M_f(r_i) = \limsup_{\substack{x \to S(r_i) \\ x \in D_{r_0 r_1}}} f(x) \qquad (i = 0, 1) \,.$$

В описанных предположениях имеет место

Теорема 3.5. *Пусть $f(x)$ есть неотрицательное $C^{1,1}$-решение уравнения*
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma(|\nabla f|^2) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \mu \,,$$
где $\mu = \mu(x)$ – измеримая в в шаровом слое $D_{r_0 r_1}$ функция, удовлетворяющая условию
$$\int\limits_{D} |\mu(x)| \, d\mathcal{H}^n \le \varepsilon \,.$$
Пусть
$$\mathcal{O} = \left\{ x \in D_{r_0 r_1} : M_f(r_0) - \Phi_0(|x|) > f(x) \right\} \,.$$
Тогда, если $S(r_0) \cap \overline{\mathcal{O}} = \emptyset$, то
$$M_f(r_0) \le M_f(r_1) - \Phi_0(r_1) \,.$$

При этом, если множество $\mathcal{O}$ не пусто, то
$$\int\limits_{\mathcal{O}} k(x) |\nabla f(x) - \nabla \Phi_0(|x|)|^2 \, d\mathcal{H}^n \le M_f(r_1) \, \varepsilon \,,$$

где
$$k(x) = \int\limits_0^1 \sigma^* \left(|\lambda \nabla f(x) - (1-\lambda) \nabla \Phi_0(|x|)|^2 \right) \, d\lambda \, .$$

Отметим одно следствие теоремы E для графиков заданной средней кривизны. Рассмотрим уравнение
$$\mathrm{div} \frac{\nabla f(x)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}} = \mu(x) \, .$$
Данное уравнение описывает графики средней кривизны $\mu(x)/n$.

Здесь
$$\sigma(\tau) = (1+\tau)^{-1/2} \, , \quad 0 \le \tau < q = \infty \, , \quad q\sigma(q^2) = 1 \, ,$$
и
$$\sigma'(\tau) = -\frac{1}{2} \, (1+\tau)^{-3/2} \le 0 \, ,$$
откуда находим
$$\sigma^*(\tau) = \sigma(\tau) + 2\tau \, \sigma'(\tau) = \frac{1}{(1+\tau)^{3/2}} \, .$$
Тем самым, все предположение теоремы E выполняются.

Далее находим
$$\Phi_0(|x|) = r_0^{n-1} \int\limits_{r_0}^{|x|} \frac{ds}{\sqrt{s^{2(n-1)} - r_0^{2(n-1)}}}$$
и
$$k(x) = \int\limits_0^1 \frac{d\lambda}{(1 + |\lambda \nabla f(x) + (1-\lambda) \nabla \Phi_0(x)|^2)^{3/2}} \ge$$
$$\ge \frac{1}{(1 + \max\{|\nabla f(x)|^2, \, |\nabla \Phi_0(x)|^2\})^{3/2}} \, .$$

Следствие 3.2 *Пусть $f(x)$ – неотрицательное C^2-решение уравнения заданной средней кривизны в шаровом слое $D_{r_0 r_1}$.*

Тогда, если $S(r_0) \cap \overline{\mathcal{O}} = \emptyset$, то
$$M_f(r_0) + r_0^{n-1} \int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{ds}{\sqrt{s^{2(n-1)} - r_0^{2(n-1)}}} \le M_f(r_1) \, .$$

При этом, если $\mathcal{O}$ не пусто, то имеет место указанная выше оценка его размеров.

В случае решений уравнения минимальных поверхностей см. главу VI цитированной выше монографии И.С.С. Ниче.

Список литературы

[1] Библейская энциклопедия, Издание Свято-Троице-Сергиевой Лавры, 1990.

[2] В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк, Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения, Изд-во 'Наука', Москва, 1983.

[3] Г.Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965, 266 стр.

[4] С.Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1950.

[5] A. Kufner, O. John, and S. Fučik, Function Spaces, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[6] В.Г. Мазья, Пространства С.Л. Соболева, Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1985.

[7] В.Г. Мазья, С.В. Поборчий, Теоремы вложения и продолжения в нелипшицевых областях, СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.

[8] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М.: Наука, 1996.

[9] Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М.: Мир, 1969.

[10] А.В. Сычев, Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосибирск: изд-во "Наука", 1983, 152 стр.

[11] В.М. Миклюков, Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005; имеется перевод: Vladimir M. Miklyukov, Conformal Maps of Nonsmooth Surfaces and Their Applications, Exlibris Corporation, Philadelphia, 2008.

[12] И.Н. Демшин, Ю.В. Дымченко, В.А. Шлык, Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств, Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 276, 2001, С. 52-82.

[13] Ю.В. Дымченко, Равенство модуля и емкости конденсатора на поверхности, Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 276, 2001, С. 112-133.

[14] Ю.В. Дымченко, В.А. Шлык, Соотношение между весовой емкостью конденсатора и весовым модулем семейства разделяющих поверхностей, Дальневосточный матем. сб., т. 2, 1996, С. 72-80.

[15] В.М. Миклюков, Теоремы вложения для весовых классов Соболева, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 4, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2009, 14-32.

[16] М.А. Лаврентьев, О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях, ДАН СССР, т. 4, 1936, 207-210.

[17] В.М. Миклюков, Расстояние Лаврентьева на анизотропных поверхностях, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 3, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008, 76-101.

[18] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, М.: Мир, 1966.

[19] С.К. Годунов, Е.И. Роменский, Элементы механики сплошных сред и законы сохранения, Новосибирск: Научная книга, 1998.

[20] Ч.В. Мизнер, К.С. Торн, Д.А. Уилер, Гравитация, т. 1-3, Бишкек: Айнштайн, 1994.

[21] С. Чандрасекар, Математическая теория черных дыр, в 2-х частях, М.: Мир, 1986.

[22] Р. Рокафеллар, Выпуклый анализ, М.: Мир, 1973.

[23] S. Mazurkiewicz, Über die Definition der Primenden, Fund. Math., v. 26, 1936, 272-279.

[24] Г.Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск: изд-во СО АН СССР, 1965, 266 стр.

[25] В.М. Миклюков, Относительное расстояние М.А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях, Укр. матем. вестн., т. 1, n. 3, 2004, 348-371.

[26] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, Oxford etc., 1993.

[27] H. Federer, Geometric Measure Theory, - Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[28] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, 2-е издание, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008.

[29] Ю.Г. Решетняк, Пространственные отображения с ограниченным искажением, Новосибирск: Наука, 1982.

[30] http://scholar.google.com.

[31] Х. Рунд, Дифференциальная геометрия финслеровых пространтсв, М.: Наука, 1981.

[32] Ф. Бродель, Время мира, Материальная цивилизация, экономика и капитализм. XV - XVII вв., т. 3, М.: Прогресс, 1992.

[33] В.М. Миклюков, Сверхмедленные процессы, www.uchimsya.info

[34] Г.С. Асанов, Финслероидная геометрия, М.: Изд-во МГУ, 2004.

[35] В.М. Миклюков, Расстояние Овчинникова на абстрактных поверхностях, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 3, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008, 117-145.

[36] В.М. Миклюков, Об одной модификации принципа длины и площади на абстрактных поверхностях, Uzbek Mathematical Journal, 2009, n. 1, 68-79.

[37] В.М. Миклюков, A-решения с особенностями как почти-решения, Матем. сб., т. 197, вып. 11, 2006, 31-50.

[38] В.М. Миклюков, Почти квазиконформные отображения как почти решения, в сб. Математический и прикладной анализ, вып. 3, изд-во Тюменск. гос. ун-та., 2007, 59-70.

[39] В.М. Миклюков, Принцип максимума для разности почти-решений нелинейных эллиптических уравнений, Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, n. 1, 2007, 33-45.

[40] В.М. Миклюков, Зоны стагнации решений и почти-решений эллиптических уравнений, Восьмая Казанск. летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, т. 35, Казань: Казанское математическое общество, 2007, 174-181.

[41] В.М. Миклюков, О зонах стагнации в сверхмедленных процессах, Докл. Акад. Наук, т. 418, n. 3, 2008, 304-307.

[42] В.М. Миклюков, Оценки размеров зоны стагнации почти решений уравнений параболического типа, Сибирский журнал индустриальной математики, т. XI, n. 3(35), 2008, 96-101.

[43] В.М. Миклюков, К неравенству Гарнака для почти решений эллиптических уравнений, Изв. РАН, Серия математическая, Т. 73, n. 5, 2009, 171-180.

[44] В.М. Миклюков, Решения параболических уравнений как почти решения эллиптических, печ. в сб. Математический и прикладной анализ. Тюменск. гос. ун-т. 2009.

[45] В.М. Миклюков, Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения, Волгоград: изд-во ВолГУ. 2007.

[46] В.М. Миклюков, Теорема о трех сферах для почти гармонических функций, готовится к печ., 2010.

[47] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, Oxford etc., 1993.

[48] В.М. Миклюков, Теорема о двух сферах для почти решений уравнений типа минимальной поверхности, готовится к печати, 2010.

[49] J.C.C. Nitsche, Vorlesungen über Minimalflächen, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1975.